

Moto circolare e leggi di moto IEC (3-4-5)

1. Introduzione al moto circolare (richiamo di cinematica)

Nel controllo del moto industriale (servoassi, tavole rotanti, camme elettroniche) il movimento può essere:

- **lineare** (assi cartesiani),
- **circolare o rotativo** (motori, alberi, tavole rotanti),
- **tangenziale** a un moto rotativo.

Dal punto di vista matematico e del controllo, **le leggi di moto sono formalmente identiche**: cambiano solo le unità di misura.

1.1 Grandezze cinematiche fondamentali

Il moto è descritto da una funzione di posizione:

- **Moto lineare**: $s(t)$ [m]
- **Moto circolare**: $\theta(t)$ [rad]

Le derivate temporali hanno lo stesso significato fisico:

Ordine	Moto lineare	Moto circolare	Significato fisico
0	$s(t)$	$\theta(t)$	posizione
1	$v(t) = \dot{s}(t)$	$\omega(t) = \dot{\theta}(t)$	velocità
2	$a(t) = \ddot{s}(t)$	$\alpha(t) = \ddot{\theta}(t)$	accelerazione
3	$j(t) = \dddot{s}(t)$	$j(t) = \ddot{\theta}(t)$	jerk

Spostamento, velocità, accelerazione e jerk sono concetti validi sia per moto lineare sia per moto circolare.

1.2 Moto tangenziale associato al moto circolare

Se un punto è a distanza R dall'asse di rotazione:

- velocità tangenziale: $v_t(t) = R \cdot \omega(t)$
- accelerazione tangenziale: $a_t(t) = R \cdot \alpha(t)$

Queste relazioni mostrano che **controllare il moto angolare equivale a controllare il moto lineare tangenziale**.

Un jerk elevato (lineare o angolare) genera vibrazioni e sollecitazioni meccaniche.

2. Legge di moto IEC quintica (3-4-5)

2.1 Introduzione

Nel controllo del moto di un asse (servoasse, attuatore elettrico, camma elettronica) è fondamentale garantire movimenti **morbidi, continui e fisicamente realizzabili**.

Brusche variazioni di accelerazione provocano:

- vibrazioni,
- rumore,
- usura meccanica,
- difficoltà di regolazione del controllo.

Per questo motivo, in ambito industriale e normativo (**IEC – International Electrotechnical Commission**), si utilizzano **leggi di moto standardizzate**, tra cui la più diffusa è la **legge di moto quintica 3-4-5**, detta anche *legge camma IEC*.

2.2 Descrizione matematica del moto

Il moto di un asse è descritto dalla funzione di spostamento:

$s(t)$

Le sue derivate temporali rappresentano:

- velocità: $v(t) = \dot{s}(t)$
- accelerazione: $a(t) = \ddot{s}(t)$
- jerk (derivata dell'accelerazione): $j(t) = \dddot{s}(t)$

Il jerk è direttamente legato alle variazioni di forza e di coppia. Un jerk elevato o discontinuo è una delle principali cause di vibrazioni nei sistemi meccanici reali.

2.3 Requisiti di un moto “morbido”

Per ottenere un moto fisicamente corretto e adatto ai servoassi, si richiede che:

- la **posizione** sia continua;
- la **velocità** sia nulla all'inizio e alla fine;
- l'**accelerazione** sia nulla all'inizio e alla fine;
- il **jerk** sia continuo.

Questi requisiti portano a imporre **condizioni al contorno** sul moto.

2.4 Condizioni al contorno

Si consideri un moto nell'intervallo temporale:

$$t \in [0, T]$$

con spostamento totale h .

Le condizioni richieste sono:

Tempo	Condizioni
$t = 0$	$s = 0, v = 0, a = 0$
$t = T$	$s = h, v = 0, a = 0$

In totale si ottengono **6 condizioni indipendenti**.

2.5 Scelta del grado del polinomio

Un polinomio di grado n possiede $n+1$ coefficienti liberi.

Per soddisfare 6 condizioni al contorno:

$$n + 1 = 6 \Rightarrow n = 5$$

Il grado minimo richiesto è quindi **5**.

2.6 Polinomio di partenza

Si assume una legge di moto dello spostamento:

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

con $t \in [0, T]$.

2.7 Derivate del moto

Velocità:

$$v(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4$$

Accelerazione:

$$a(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3$$

2.8 Applicazione delle condizioni ai limiti

Dalle condizioni iniziali:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0$$

Il polinomio si riduce a:

$$s(t) = a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

Applicando le condizioni finali e risolvendo il sistema si ottiene:

$$a_3 = 10h / T^3$$

$$a_4 = -15h / T^4$$

$$a_5 = 6h / T^5$$

2.9 Forma finale della legge IEC (nel tempo)

$$s(t) = h \cdot [10 \cdot (t/T)^3 - 15 \cdot (t/T)^4 + 6 \cdot (t/T)^5]$$

Questa è la **legge di moto IEC quintica (3-4-5)**.

2.10 Significato fisico

- il 3° grado garantisce solo continuità di posizione e velocità;
- il 5° grado garantisce anche continuità dell'accelerazione;
- il jerk risulta continuo.

In pratica:

- minori vibrazioni,
 - riduzione del rumore,
 - maggiore durata meccanica,
 - migliore inseguimento del servosasse.
-

3. Applicazione nelle camme elettroniche (PLC Siemens)

Nei sistemi Siemens (TIA Portal, Sinamics, V90, PLCopen Motion Control):

- le camme elettroniche utilizzano segmenti polinomiali di 5° ordine;
- anche partendo da tabelle di punti, il firmware interpola con leggi quintiche.

La legge IEC rappresenta quindi:

- uno standard industriale;
 - una base teorica comune tra simulazione, PLC e azionamenti.
-

4. Legge IEC come relazione cinematica master-slave (senza il tempo)

Nelle applicazioni pratiche (camme elettroniche, tabelle CSV, Excel, DB PLC) spesso **non si utilizza direttamente il tempo** come variabile indipendente.

Si lavora invece con una **relazione cinematica tra due posizioni**:

- **master** (asse di riferimento)
- **slave** (asse comandato)

La legge IEC può essere riscritta in forma **puramente geometrica**, indipendente dal tempo.

4.1 Variabile normalizzata σ (sigma)

Si introduce una variabile adimensionale:

$$\sigma \in [0, 1]$$

che rappresenta l'avanzamento del master lungo il tratto considerato.

4.2 Risultato finale – Legge IEC normalizzata

La legge di moto IEC quintica, espressa come relazione posizione-posizione, è:

$$s(\sigma) = 10\sigma^3 - 15\sigma^4 + 6\sigma^5$$

Proprietà fondamentali:

- $s(0) = 0$
- $s(1) = 1$
- derivate prima e seconda nulle agli estremi

Questa forma è **equivalente alla legge nel tempo**, ma non contiene il tempo.

5. Da teoria a punti (CSV / Excel)

Il sistema ECam legge impulsi laser salvandoli in file formato CSV / Excel per l'analisi in Matlab

STEP 1 — Scelta degli estremi

- **master:** $x_0 \rightarrow x_f$
 - **slave:** $y_0 \rightarrow y_f$
-

STEP 2 — Normalizzazione del master

Per ogni punto x_i del master si calcola:

$$\sigma_i = (x_i - x_0) / (x_f - x_0)$$

In questo modo ogni punto viene ricondotto all'intervallo $[0, 1]$.

Equivalenza con la normalizzazione temporale

Se il master fosse il tempo:

$$\sigma = t / T$$

allora:

$$\sigma = (x - x_0) / (x_f - x_0)$$

La legge resta identica: cambia solo il significato fisico della variabile indipendente.

STEP 3 — Applicazione della legge IEC

Per ogni valore σ_i si calcola:

$$s_i = 10\sigma_i^3 - 15\sigma_i^4 + 6\sigma_i^5$$

STEP 4 — Denormalizzazione dello slave

Il valore reale dello slave diventa:

$$y_i = y_0 + (y_f - y_0) \cdot s_i$$

6. Struttura tipica del file CSV

Index	Master x_i	Slave y_i
1	x_0	y_0
2	x_1	y_1

Index	Master x_i	Slave y_i
...	...	...
N	x_f	y_f

Il PLC o il drive utilizza questi punti e li interpola internamente garantendo continuità di accelerazione.

7. Conclusione

La legge di moto IEC quintica 3-4-5 non è una semplice formula, ma il risultato diretto di:

- vincoli fisici sul moto;
- requisiti di qualità del movimento;
- necessità di affidabilità industriale.

Essa costituisce il riferimento fondamentale per la progettazione di camme elettroniche e profili di moto nei moderni sistemi di automazione.

APPENDICE

Ricordando le condizioni iniziali e finali

$$t = 0 \rightarrow s(t) = 0, v(t) = 0, a(t) = 0$$

$$t = T \rightarrow s(T) = h, v(T) = 0, a(T) = 0$$

date le equazioni

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

$$v(t) = s'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4$$

$$a(t) = s''(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3$$

per $t=0$ si ha

$$0 = a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 + a_3 0^3 + a_4 0^4 + a_5 0^5$$

$$0 = s'(t) = a_1 + 2a_2 0 + 3a_3 0^2 + 4a_4 0^3 + 5a_5 0^4$$

$$0 = s''(t) = 2a_2 + 6a_3 0 + 12a_4 0^2 + 20a_5 0^3$$

da cui si ricava $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

Possiamo allora semplificare ulteriormente il sistema

$$s(t) = a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

$$v(t) = s'(t) = 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4$$

$$a(t) = s''(t) = 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3$$

Ponendo adesso $t = T$ si ha

$$h = a_3 T^3 + a_4 T^4 + a_5 T^5$$

$$0 = 3a_3 T^2 + 4a_4 T^3 + 5a_5 T^4$$

$$0 = 6a_3 T + 12a_4 T^2 + 20a_5 T^3$$

Per semplicità poniamo $T = 1$ e ricaviamo i 3 coefficienti (le incognite) dalle 3 equazioni

$$\begin{cases} a_3 + a_4 + a_5 = h \\ 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 0 \\ 6a_3 + 12a_4 + 20a_5 = 0 \end{cases}$$

Procediamo per sostituzione. Moltiplichiamo la seconda equazione per -2 e la sommiamo alla terza equazione ed otteniamo

$$2a_4 + 5a_5 = 0 \Rightarrow a_4 = -\frac{5}{2} a_5$$

Adesso moltiplichiamo la prima equazione per -6 e la sommiamo alla terza equazione ed otteniamo

$$6a_4 + 14a_5 = -6h$$

Sostituiamo $a_4 = -\frac{5}{2} a_5$ nella precedente equazione ed otteniamo $a_5 = 6h$

Sostituiamo $a_5 = 6h$ nella equazione $2a_4 + 5a_5 = 0$ ed otteniamo $a_4 = -15h$

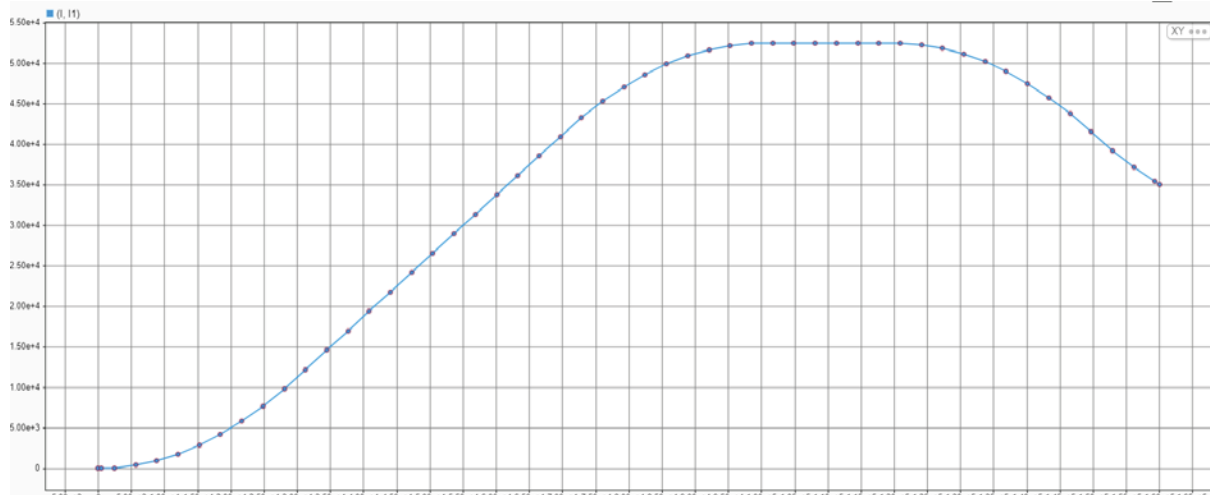
Sostituiamo infine $a_4 = -15h$ ed $a_5 = 6h$ in $a_3 + a_4 + a_5 = h$ ed otteniamo $a_3 = 10h$

Il risultato (in forma normalizzata) è:

$$s(t) = h(10(\frac{t}{T})^3 - 15(\frac{t}{T})^4 + 6(\frac{t}{T})^5)$$

Costruzione della curva non conforme allo standard IEC

Di seguito è messo in evidenza perché la costruzione a tratti non rispetta le condizioni IEC per camme elettroniche



Il grafico di figura è una ricostruzione a tratti di una curva di posizione ottenuta “unendo i punti”.

Una funzione del genere è del tipo

$$f(x) = \begin{cases} y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) & x \in [x_0, x_1] \\ y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ y_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} (x - x_{n-1}) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Il passaggio tra un segmento e l'altro può avvenire attraverso punti di non derivabilità. Questo avviene ogni volta che

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \neq \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}}$$

In questo caso, nei punti sopra menzionati, si avranno movimenti discontinui con vibrazioni, scuotimenti, rumore ed usura meccanica.